

Boole Cebri

Boolean Cebri, Mantıksal Bağlaçlar, Lojik Kapılar ve Çalışma Mantıkları,
Doğruluk Tabloları, Boole Cebri Teoremleri, Lojik İfadelerin
Sadeleştirilmeleri

Boole Cebri

- Önermeler veya nesneler arasında ilişkileri betimler
- Simgesel matematiksel bir mantık sistemi
- 1854, George Boole, Mantık cebri
- 1938, Shannon, anahtar cebri
- Bilgisayarlarda kullanılan devrelerin tasarımı için gerekli temel

Boole Cebrinin Esasları

- Bir değişmez (sabit değişken), 1 ya da 0 şeklinde iki değer alabilir.
- İfadeler sabit değişkenin kendisi ya da tümleyenidir (değili/tersi).
- **Ve (AND)** bağlacı($\cdot$, $\wedge$), **Veya (OR)** bağlacı(+, $\vee$), **değil (NOT)** ($\neg$, ')

x	y	x.y x $\wedge$ y	x+y x $\vee$ y
Doğru	Doğru	Doğru	Doğru
Doğru	Yanlış	Yanlış	Doğru
Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru
Yanlış	Yanlış	Yanlış	Yanlış

x	y	x.y x $\wedge$ y	x+y x $\vee$ y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Boole Cebri Kuralları

- Değişme Kuralı:

$$X+Y= Y+X \qquad X.Y=Y.X$$

- Birleşme Kuralı:

$$X+Y+Z=(X+Y)+Z=X+(Y+Z) \qquad X.Y.Z=(X.Y).Z=X.(Y.Z)$$

- Dağılma Kuralı:

$$X.(Y+Z)=X.Y+X.Z \qquad (X+Y). (X+Z) = X+Y.Z$$

- Özdeşlik Kuralı:

$$X+X=X$$

$$X.X=X$$

Boole Cebri Kuralları

- VE Kuralı:

$$X.1=X \quad X.0=0$$

- VEYA Kuralı

$$X+0=X \quad X+1=1$$

- Tamamlayıcı Kuralı

$$x+\bar{x}=1$$

$$x.\bar{x}=0$$

- De Morgan Kuralı

$$\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$$

- Tersin Tersi Kuralı

$$\overline{\overline{X}} = X$$

$$\overline{\overline{X + Y}} = X + Y$$

$$\overline{\overline{X.Y}} = X.Y$$

Boole Cebri Kuralları

A, B ve C

$$\overline{A} + B + \overline{C} = 0 ?$$

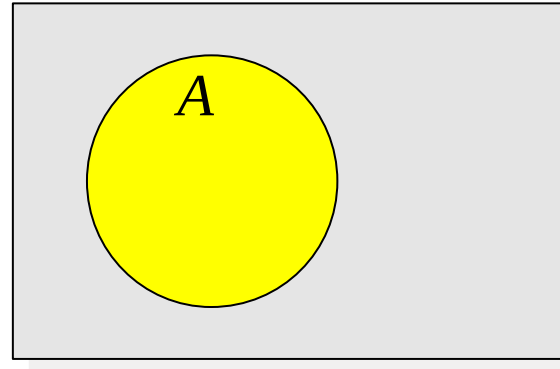
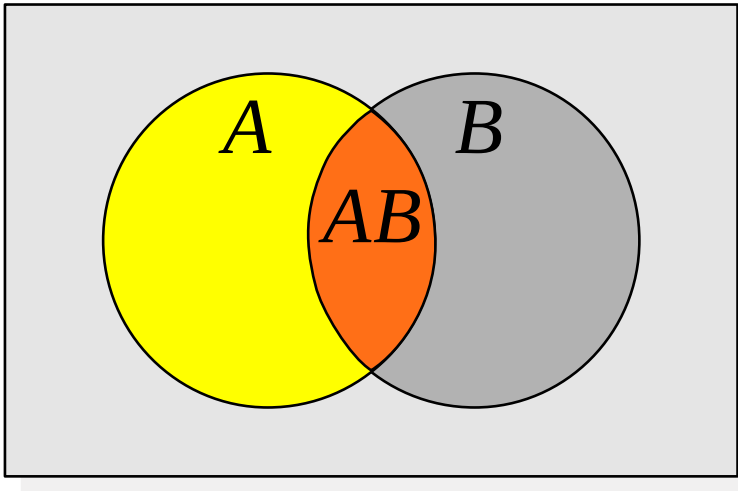
$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = 1 ?$$

$$A(A + \overline{B}) = ?$$

$$AB + A\overline{B} = ?$$

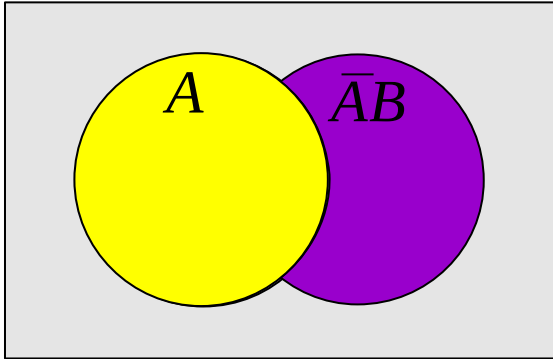
Boole Cebri- Venn Şemaları Gösterimi

- $A + AB = A$

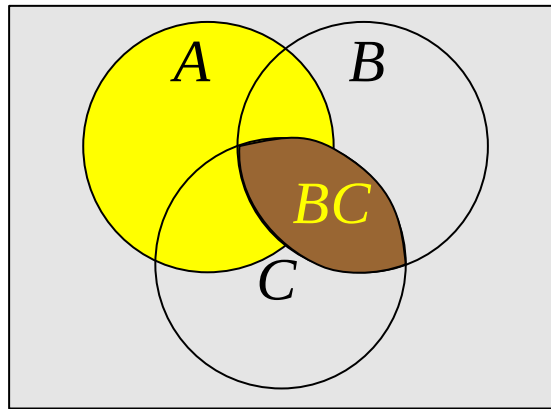
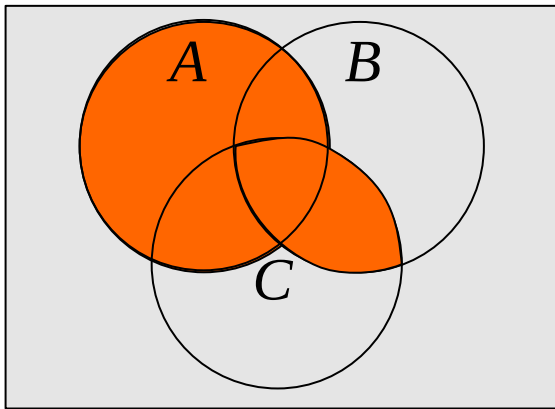


Boole Cebri- Venn Şemaları Gösterimi

- $A + \bar{A}B = A + B$



- $(A + B)(A + C) = A + BC$



Doğruluk Tabloları ve işlem sadeleştirme

x	y	$x \cdot y$	$x \wedge y$	$x + y$	$x \vee y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

$X \cdot Y + X$ fonksiyonuna ait doğruluk tablosu?

Doğruluk Tabloları ve işlem sadeleştirme

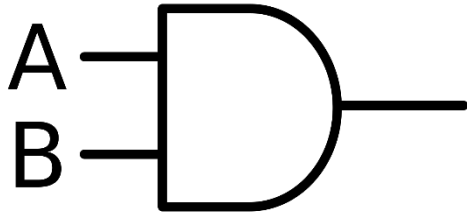
- $X.Y + \bar{X}.Y + \bar{Y} = ?$

- $X.Y.Z + X.Y.\bar{Z} + \bar{X}.Y = ?$

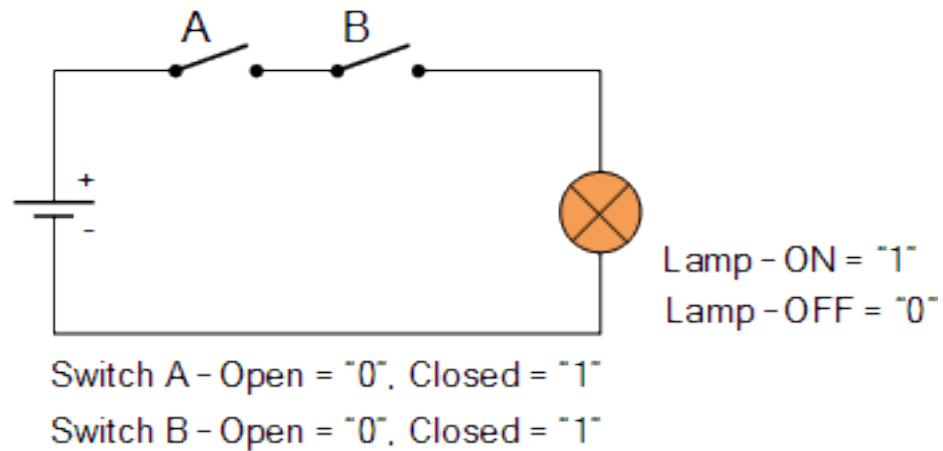
- $X.(\bar{X} + Y) = ?$

Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

VE KAPISI (AND)

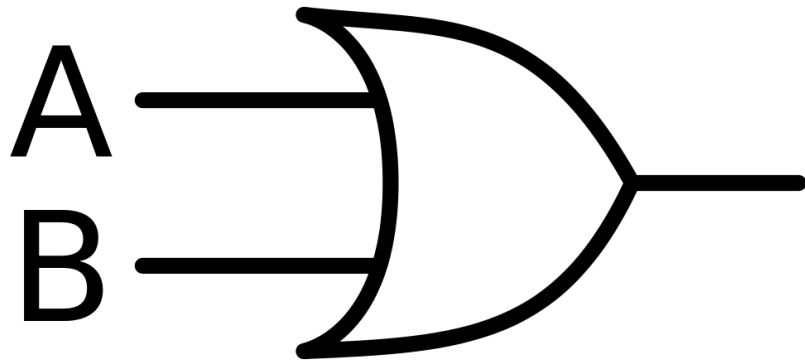


A	B	F=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

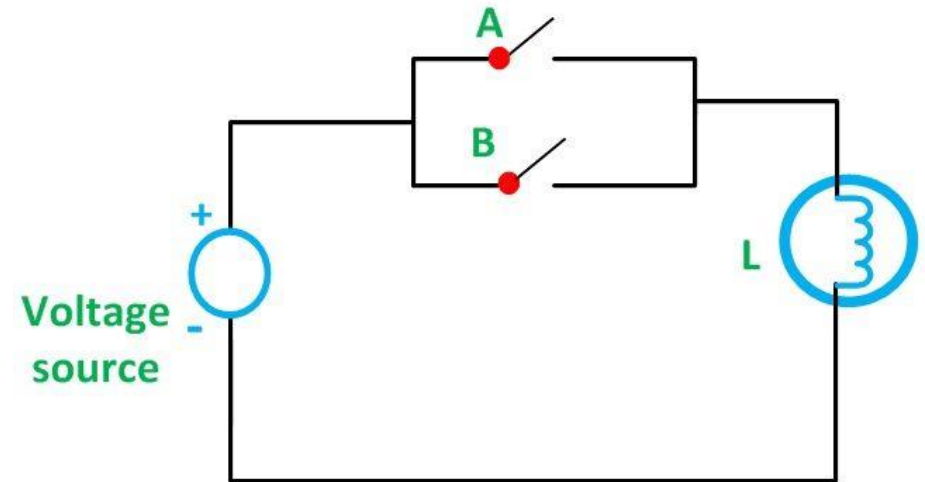


Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- **VEYA KAPISI (OR)**



A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

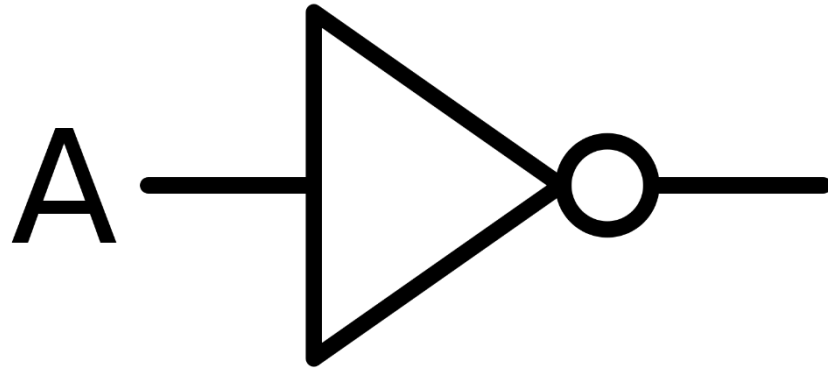


Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

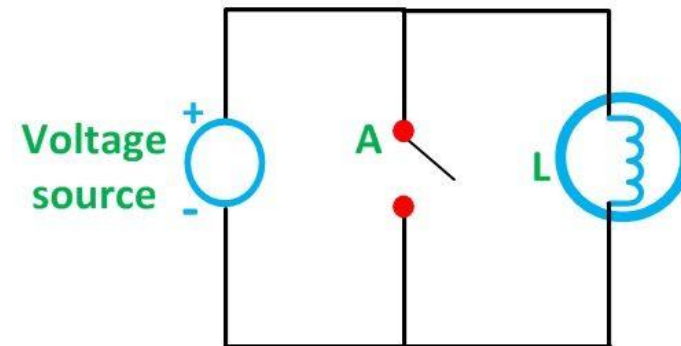
- Üç Girişli Veya Kapısı?

Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- DEĞİL KAPISI (NOT)

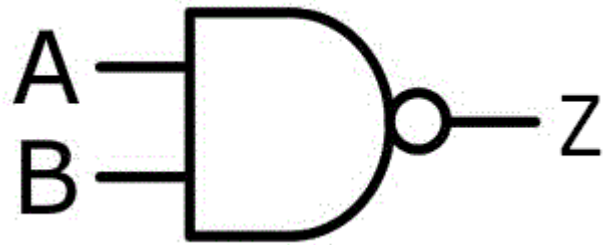


A	F
0	1
1	0

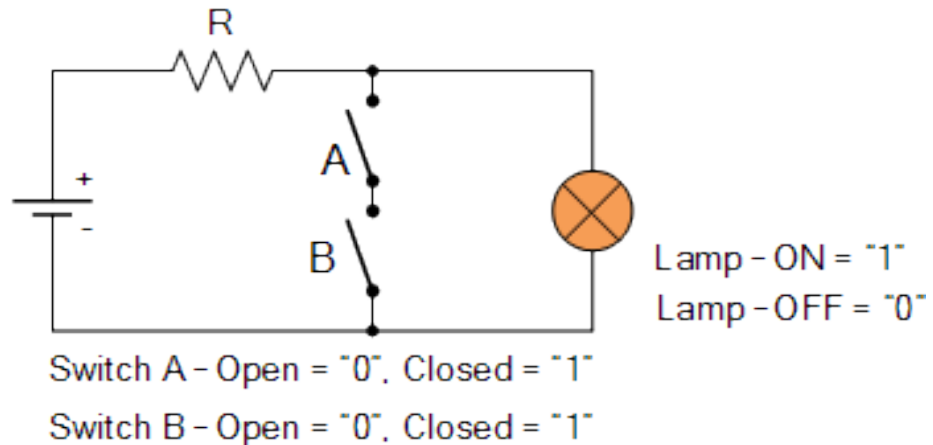


Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- Ve DEĞİL KAPISI (NAND)

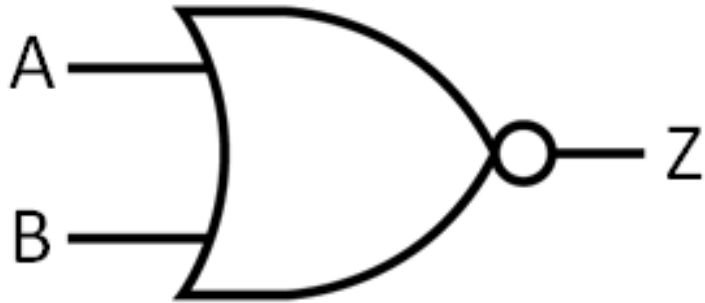


A	B	$Z = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

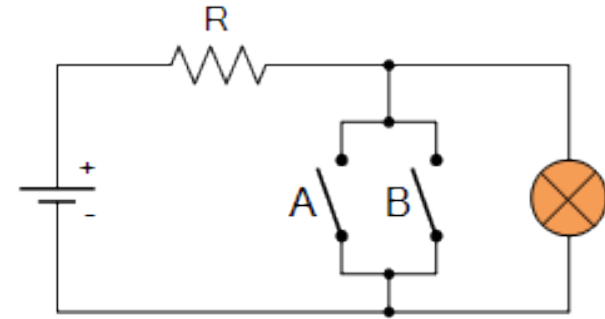


Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- VEYA DEĞİL KAPISI (NOR)



A	B	$Z = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



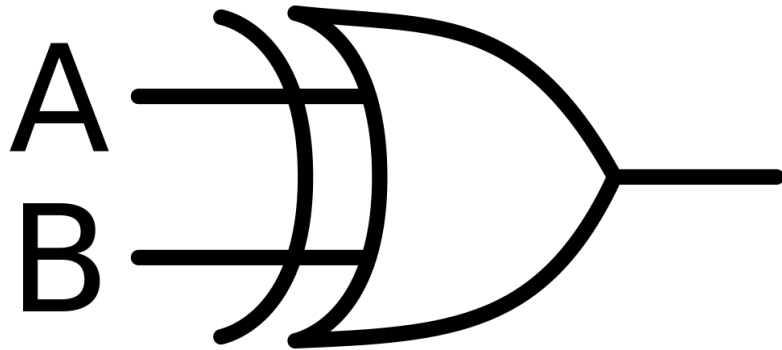
Lamp - ON = "1"
Lamp - OFF = "0"

Switch A - Open = "0", Closed = "1"

Switch B - Open = "0", Closed = "1"

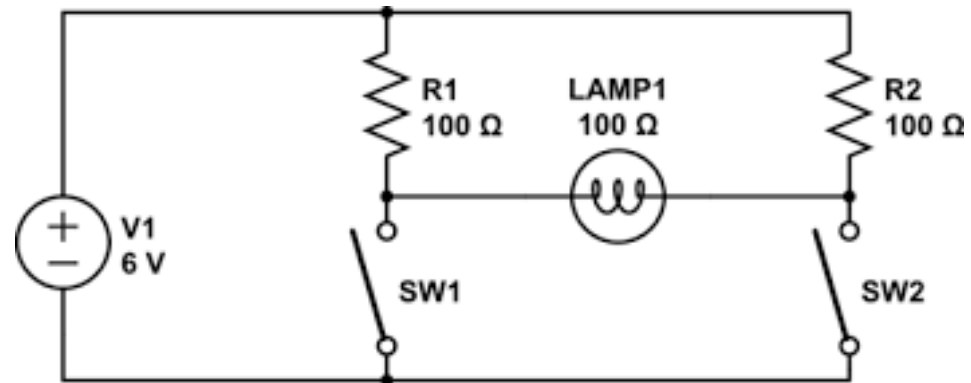
Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- YA DA KAPISI (XOR)



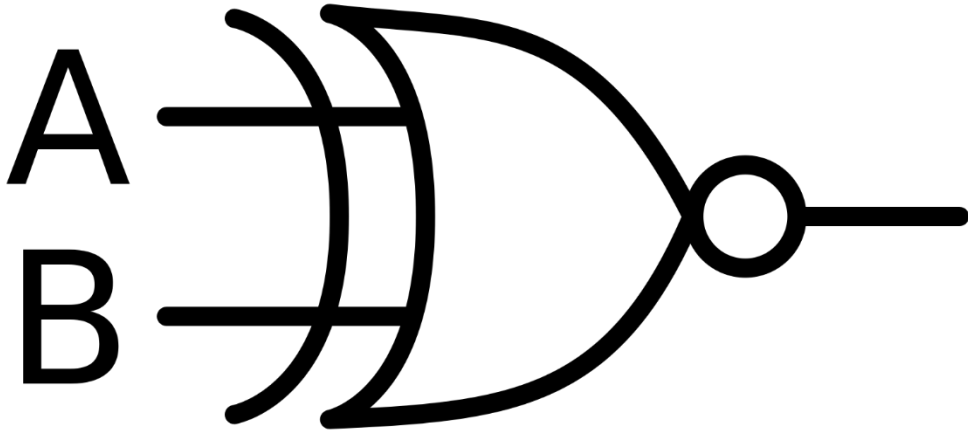
A	B	$Z=A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\oplus \bullet \bar{A}.B + A.\bar{B}$$



Lojik Kapılar ve Doğruluk Tabloları

- YA DA DEĞİL KAPISI (XNOR)

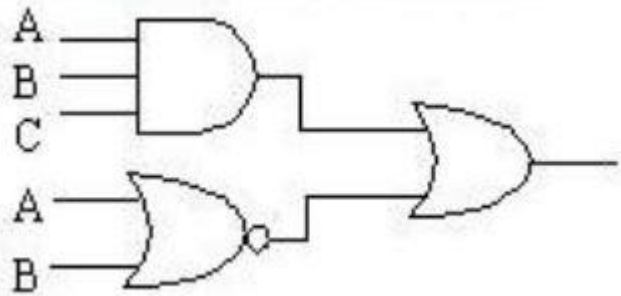
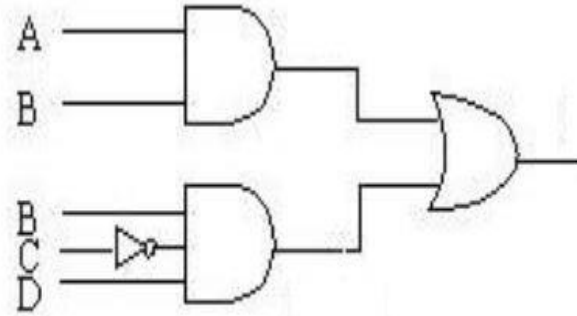
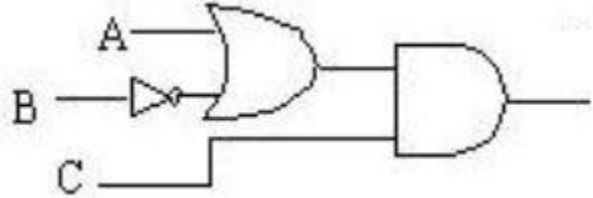


A	B	$Z = A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- $A.B + \bar{A}.\bar{B}$

Lojik diyagram örnekleri

- Lojik diyagramlardan mantıksal ifadenin elde edilmesi



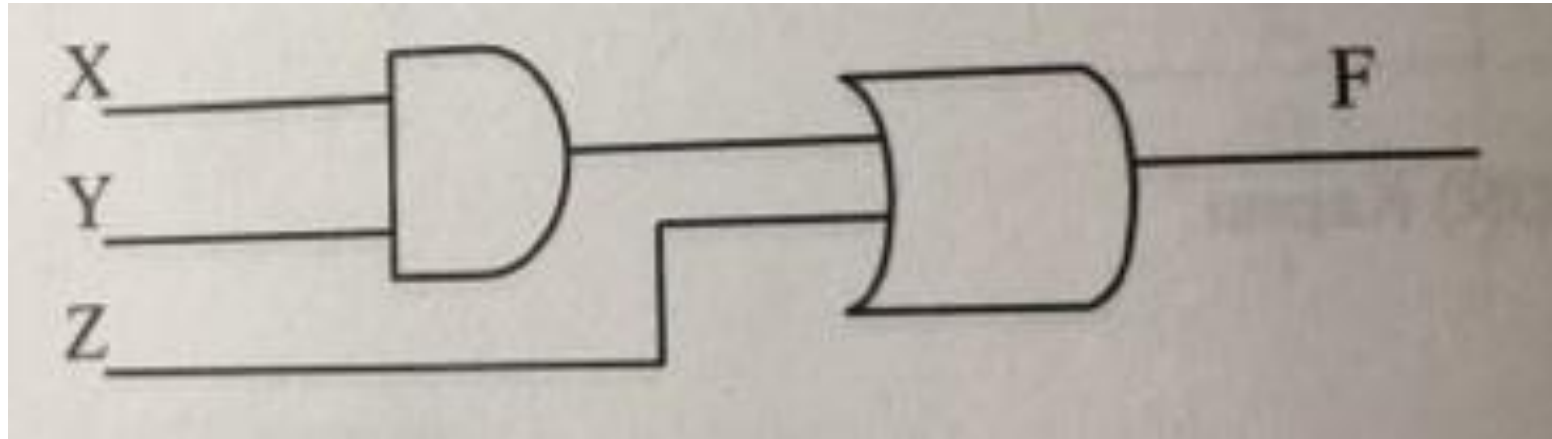
Lojik diyagram örnekleri

- Mantıksal eşitlikten Lojik Diyagramın elde edilmesi

Lojik Kapı Örnekleri-

Lojik Diyagramdan Matematiksel İfadenin Elde Edilmesi

- Aşağıdaki devrenin matematiksel karşılığını bulunuz.

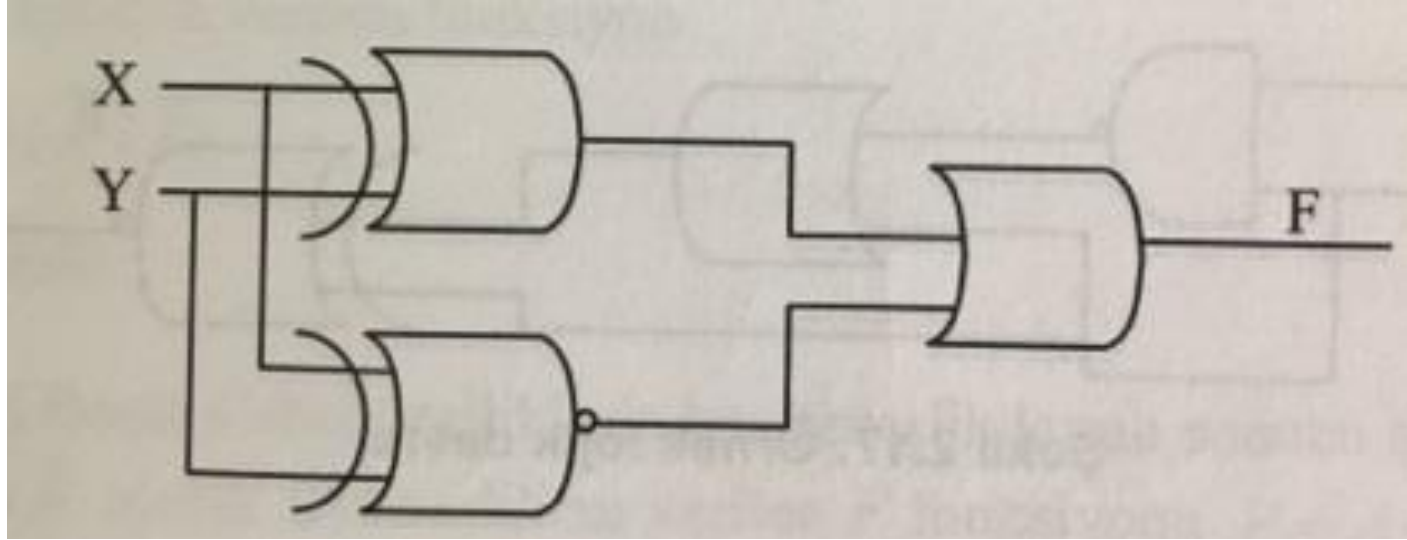


Şekil: VE VEYA Kapısı Örneği

Lojik Kapı Örnekleri-

Lojik Diyagramdan Matematiksel İfadenin Elde Edilmesi

- Aşağıdaki devrenin matematiksel karşılığını bulunuz.

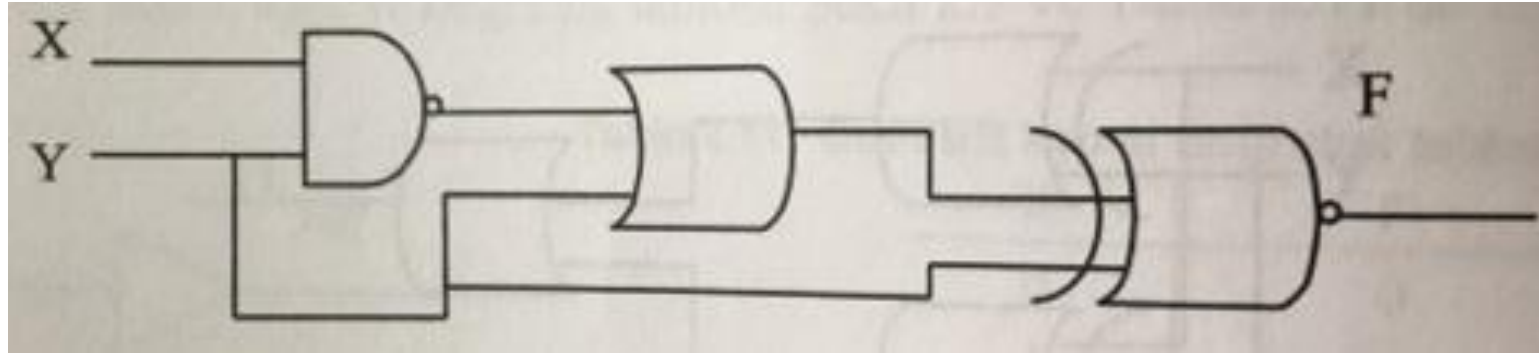


Şekil: YA DA VEYA ile Örnek Devre

Lojik Kapı Örnekleri-

Lojik Diyagramdan Matematiksel İfadenin Elde Edilmesi

- Aşağıdaki devrenin matematiksel karşılığını bulunuz.



Şekil: Örnek Lojik Devre

Lojik Kapı Örnekleri-

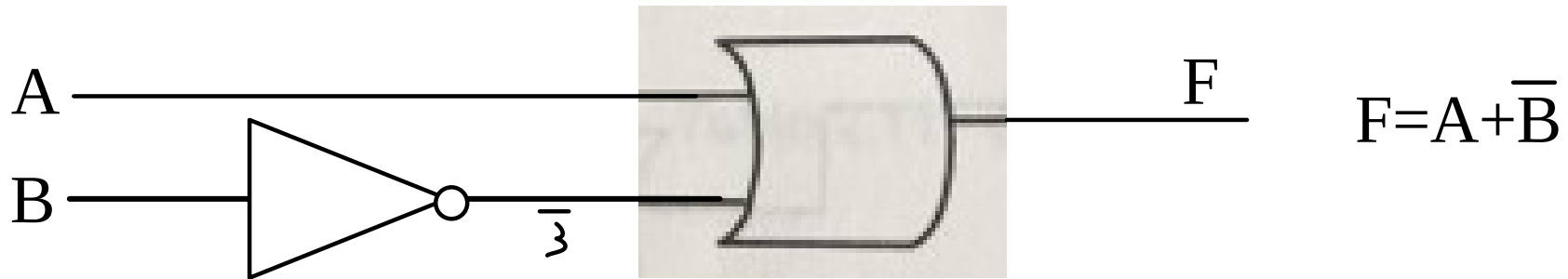
Matematiksel Eşitlikten Lojik Diyagramın Elde Edilmesi

- Aşağıdaki matematiksel eşitlikten lojik diyagramı elde ediniz.

$$F = (\overline{\overline{A}B}).(A + \overline{B})$$

Lojik Kapı Örnekleri-

Matematiksel Eşitlikten Lojik Diyagramının Elde Edilmesi



Lojik Kapı Örnekleri-

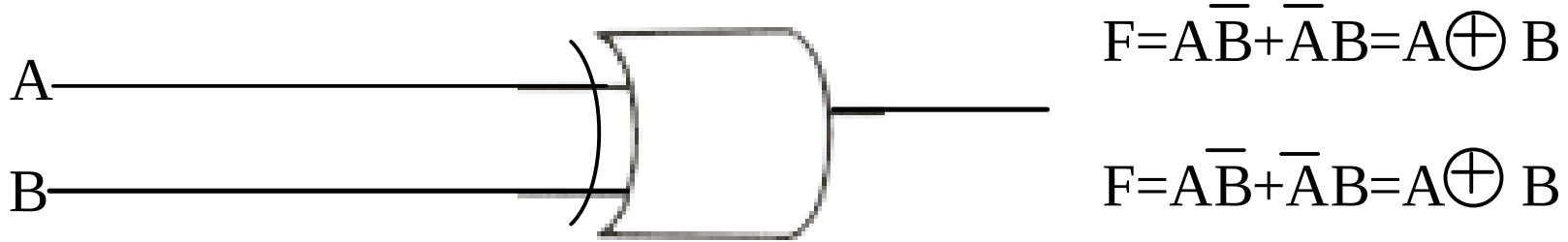
Matematiksel Eşitlikten Lojik Diyagramın Elde Edilmesi

- Aşağıdaki matematiksel eşitlikten lojik diyagramı elde ediniz.

$$F = \overline{(\bar{A} + AB)} \cdot (\bar{B} + AB)$$

Lojik Kapı Örnekleri-

Matematiksel Eşitlikten Lojik Diyagramının Elde Edilmesi



Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Minimum Terimler (Minterm)

- Bitlik mintermlerin gösterilmesi

Değişkenler (x, y)		Minterm	Minterm Simgesi
0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	m_0
0	1	$\bar{x} \cdot y$	m_1
1	0	$x \cdot \bar{y}$	m_2
1	1	$x \cdot y$	m_3

Tabloda görüldüğü üzere minterm çarpım ile gösterilip değişkenlerin '0' durumunda tümleyeni ($\bar{x}$, $\bar{y}$), '1' durumunda kendisi (x, y) ile gösterilir. Örneğin; $x \bar{y}$, x'in '1', y'nin '0' olduğu durumu gösterir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Minimum Terimler (Minterm)

- $F(x, y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + xy$ ifadesini mintermlerle gösteriniz.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Minimum Terimler (Minterm)

- Bitlik minterm tablosu göz önüne alındığında verilen terimlere ilişkin ifade mintermler şeklinde,
- $F = m_0 + m_2 + m_3$ veya
- $F(x, y) = \sum (0, 2, 3)$ gibi yazılabilir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Maksimum Terimler (Maksterm)

- Bitlik maksterm tablosu göz önüne alındığında verilen terimlere ilişkin ifade makstermler şeklinde,

Değişkenler (x, y)		Maksterm	Maksterm Simgesi
0	0	$\overline{x} + \overline{y}$	M_0
0	1	$x + \overline{y}$	M_1
1	0	$\overline{x} + y$	M_2
1	1	$\overline{x} + \overline{y}$	M_3

Karnaugh Diyagramları-İki Değişkenli

m_0	m_1
m_2	m_3

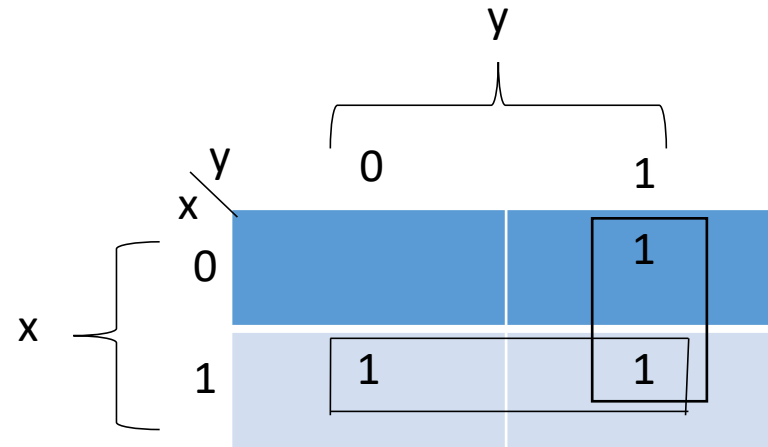
		y	
		$\begin{array}{ c c }\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	
x	y		
	$\begin{array}{ c }\hline 0 \\ \hline\end{array}$	$\bar{x} \bar{y}$	$\bar{x} y$
$\begin{array}{ c }\hline 1 \\ \hline\end{array}$		$x \bar{y}$	$x y$

Karnaugh Diyagramları-İki Değişkenli

- $F(x, y) = x + \bar{x}y$ fonksiyonunu **karnaugh** diyagramı ile sadeleştiriniz.

Karnaugh Diyagramları-İki Değişkenli

- $F(x, y) = x + \bar{x}y$ fonksiyonu;



Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

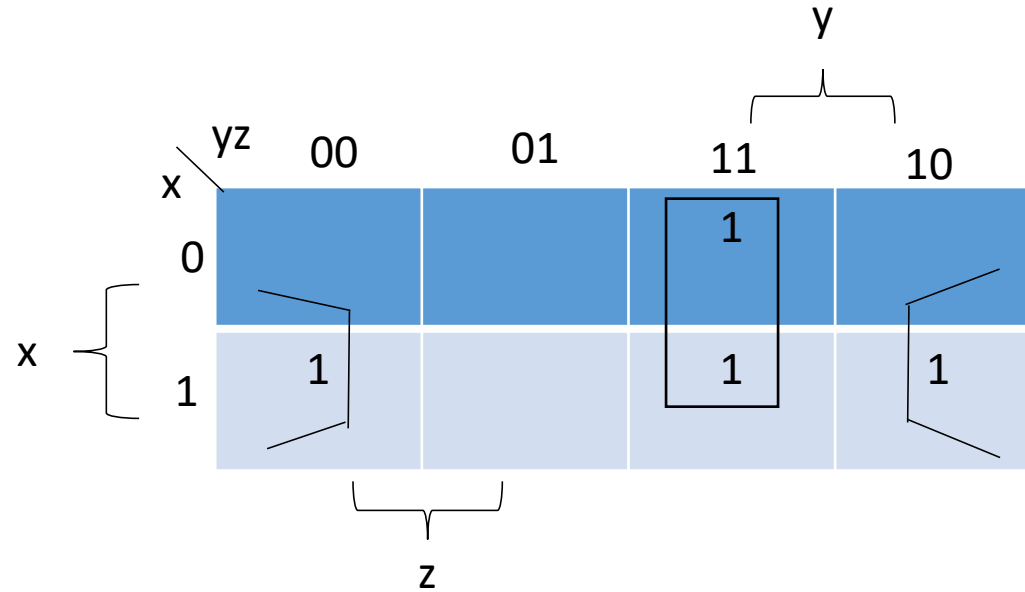
		y			
		yz			
		00	01	11	10
x	0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} y z$	$\bar{x} y \bar{z}$
	1	$x \bar{y} \bar{z}$	$x \bar{y} z$	$x y z$	$x y \bar{z}$
		z			

Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = \bar{x} y z + x y z + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z}$ fonksiyonunu **karnaugh** diyagramı yardımıyla sadeleştiriniz.

Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = \bar{x} y z + x y z + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z}$ fonksiyonu;



Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = x \bar{y} z + \bar{x} y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$ fonksiyonunu **karnaugh** diyagramı yardımıyla sadeleştiriniz.

Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = x \bar{y} z + \bar{x} y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$ fonksiyonu;

		y					
		yz		00	01	11	10
x	0					1	1
	1	1	1				
				z			

Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = \bar{x} + x y \bar{z} + y z$ fonksiyonunu **karnaugh** diyagramı yardımıyla sadeleştiriniz.

Karnaugh Diyagramları-Üç Değişkenli

$F(x, y, z) = \bar{x} + x y \bar{z} + y z$ fonksiyonu;

